

**Автономная некоммерческая организация профессионального образования  
«ПЕРМСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»  
(АНО ПО «ПГТК»)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ОП.10 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

для специальности

09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением  
(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника  
**Программист**

Форма обучения  
**Очная**

Пермь 2026

Методические рекомендации по выполнению практических работ дисциплины «ОП.10 Дискретная математика с элементами математической логики» предназначены для студентов и преподавателей АНО ПО «ПГТК». Методические рекомендации определяют ориентиры и способствуют более обстоятельному усвоению программного материала, организации самостоятельного процесса изучения учебного предмета обучающимися специальности СПО 09.02.11 «Разработка и управление программным обеспечением».

Данные методические рекомендации помогут организовать самостоятельную деятельность студентов на основе деятельного и компетентного подходов к обучению, что соответствует ФГОС СПО по специальности СПО 09.02.11 «Разработка и управление программным обеспечением».

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебному предмету предназначены для обучающихся и преподавателей АНО ПО «ПГТК».

Автор-составитель: Дудина Н.А., старший преподаватель.

# 1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий учебному предмету «ОП.10 Дискретная математика с элементами математической логики» предназначены для обучающихся по специальности: 09.02.11 «Разработка и управление программным обеспечением» Рабочей программой дисциплины предусмотрено выполнение студентами практических занятий. Цель работ – углубление, расширение и закрепление знаний, полученных на теоретических занятиях по данной дисциплине.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- У1.**распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте, анализировать и выделять её составные части;
- У2.**определять этапы решения задачи, составлять план действия, реализовывать составленный план, определять необходимые ресурсы;
- У3.**выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;
- У4.**владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;
- У5.**оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- У6.**взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности
- У7.**понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые), понимать тексты на базовые профессиональные темы
- У8.**участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы
- У9.**строить простые высказывания о себе и о своей профессиональной деятельности
- У10.** кратко обосновывать и объяснять свои действия (текущие и планируемые);
- У11.** управлять данными в базе данных, включая ввод, обновление и удаление данных;
- У12.** иметь представление об использовании графов в программировании;
- У13.** выполнять операции над множествами, вычислять мощность, строить диаграммы Венна, доказывать тождества;
- У14.** представлять бинарные отношения и анализировать их свойства;
- У15.** представлять высказывания с помощью логических формул, строить таблицы истинности, упрощать формулы логики;
- У16.** приводить формулы логики к ДНФ и КНФ, строить СДНФ, СКНФ, многочлен Жигалкина.
- У17.** решать задачи на графы, иметь представление об использовании различных алгоритмов в решении задач;
- У18.** решать комбинаторные задачи.

**знать:**

- З1.** актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить
- З2.** структуру плана для решения задач, алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;
- З3.** основные источники информации и ресурсы для решения задач и/или проблем в профессиональном и/или социальном контексте;
- З4.** методы работы в профессиональной и смежных сферах;
- З5.** правила построения простых и сложных предложений на профессиональные темы
- З6.** основные общеупотребительные глаголы (бытовая и профессиональная лексика)

37. лексический минимум, относящийся к описанию предметов, средств и процессов профессиональной деятельности
38. особенности произношения
39. правила чтения текстов профессиональной направленности;
310. основные принципы управления данными и обслуживания базы данных;
311. определения теории множеств и операции над ними;
312. бинарные отношения и их свойства;
313. понятие высказывания, операции, формулы и законы логики, равносильные преобразования;
314. понятие и способы задания булевой функции, методы минимизации форм булевой функции, ДНФ и КНФ, основные классы функций, полнота множества, теорему Поста;
315. основные понятия теории, способы задания и виды графов, матрицы смежности и инцидентий, алгоритм связности, эйлеровы и гамильтоновы графы;
316. правило умножения и сложения, перестановки, сочетания, размещения; основные формулы комбинаторики, бином Ньютона.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.3. Реализовывать базу данных в конкретной системе управления базами данных.

#### **Форма промежуточной аттестации по учебному предмету**

Наименование учебного предмета	Форма промежуточной аттестации
ОП.10 Дискретная математика с элементами математической логики	Дифференцированный зачет

### **ОРГАНИЗАЦИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА**

В период обучения по образовательной программе СПО с получением среднего образования осуществляется текущий контроль успеваемости студентов и промежуточная аттестация по общеобразовательным учебным предметам.

Текущий контроль осуществляется в пределах учебного времени, отведенного на учебный предмет, оценивается по пятибалльной шкале. Текущий контроль проводится с целью объективной оценки качества освоения программы предмета, а также стимулирования учебной деятельности студентов, подготовки к промежуточной аттестации и обеспечения максимальной эффективности учебного процесса. Для оценки качества подготовки используются различные формы и методы контроля. Текущий контроль учебного предмета осуществляется в форме устного опроса; защиты практических заданий, реферата, творческих работ; выполнения контрольных и тестовых заданий.

Промежуточная аттестация проводится в форме: экзамена.

В период сложной санитарно-эпидемиологической обстановки или других ситуациях невозможности очного обучения и проведения аттестации студентов колледж реализует образовательные программы или их части с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий в предусмотренных законодательством формах обучения или при их сочетании, при проведении учебных занятий, практик, текущего контроля успеваемости, промежуточной, аттестации обучающихся.

Форма промежуточной аттестации по учебной дисциплине Дискретная математика с элементами математической логики» - дифференцированный зачет.

## 2. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА

### Практическое занятие № 1.

**Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение. Вычисление мощности множества. Построение диаграмм Венна для множества и подмножества.**

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

### *Краткая теория*

Математика утверждает, что теория множества появилась на свет 7.12.1873 г. В этот день Г. Кантор (1845 – 1918 профессор математики и философии в Галле) написал письмо Дедекинду (1831 – 1918 немецкий математик), в котором утверждал, что ему удалось посредством множеств доказать, что действительных чисел больше, чем натуральных.

*Множество* – основное математическое понятие. Его смысл выражается словами *совокупность, набор и т. д. однотипных элементов, воспринимаемых как единое целое.*

Множества обозначают большими латинскими буквами.

Например,  $A = \{\text{Коля, Петя, Маша, Ира}\}$ ,  $B = \{1, 2, 7\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ .

*Все предметы, составляющие множества, называются элементами множества.* Элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами. Например, если элемент  $x$  принадлежит множеству  $K$ , то пишут  $x \in K$ , если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $K$ , то пишут  $x \notin K$ .

Есть множество, в котором *нет ни одного элемента*. Его называют **пустым** множеством и обозначают  $\emptyset$ .

Множество может быть **конечным**, если оно *состоит из конечного числа элементов*, и **бесконечным**, если оно *содержит бесконечно много элементов*. Примером конечного множества может служить множество дней недели, примером бесконечного множества – множество натуральных чисел.

Из школьного курса вам известны примеры бесконечных числовых множеств – множеств натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

Множество может быть задано:

- перечислением. Например,  $K = \{2, 4, 20, 40\}$ ;
- характеристическим свойством, т.е. свойством, характерным только для элементов

этого множества. Например,  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$ .

Из элементов множества  $A = \{\text{Коля, Петя, Маша, Ира}\}$ , например, можно составить новое множество  $M = \{\text{Петя, Маша}\}$ . Оно характеризуется тем, что все элементы  $M$  принадлежат множеству  $A$ . Говорят, что  $M$  – *подмножество* множества  $A$  и пишут  $M \subset A$ .

Множество  $M$  является **подмножеством** множества  $A$ , если *всякий элемент множества  $M$  является элементом множества  $A$*  и обозначают  $M \subset A$ .

Например, множество всех первокурсников является подмножеством множества всех студентов.

Для любого множества  $A$  справедливо:

- 1) Само множество является своим подмножеством, т.е.  $A \subset A$ .
- 2) Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е.  $\emptyset \subset A$ .

Пример:

Сколько можно составить подмножеств множества  $B$ ?

1.  $B = \{0, 1\}$ , тогда  $\{0\} \subset B$ ,  $\{1\} \subset B$ ,  $\emptyset \subset B$ ,  $\{0, 1\} \subset B$  – четыре.

2.  $B = \{1, 2, 3\}$ , тогда  $\{1\} \subset B$ ,  $\{2\} \subset B$ ,  $\{3\} \subset B$ ,  $\{1, 2\} \subset B$ ,  $\{1, 3\} \subset B$ ,  $\{2, 3\} \subset B$ ,  $\emptyset \subset B$ ,  $\{1, 2, 3\} \subset B$  – восемь.

Можно доказать, что если в множестве  $n$  элементов, то оно имеет  $2^n$  подмножеств.

Множества считаются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов. А также множества  $A$  и  $B$  **равны**, если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

Пусть  $A = \{2, 1, 3\}$ , а  $B = \{1, 2, 3\}$  тогда  $A = B$ .

### Операции над множествами

Над множествами производятся операции: *пересечение, объединение, разность, дополнение*.

**Пересечением** множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cap B$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам  $A$  и  $B$ , т.е.  ~~$AB \{x \in A \wedge x \in B\}$~~ .

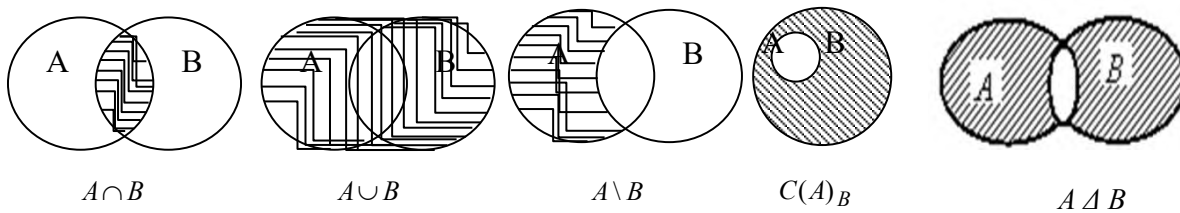
**Объединением** множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cup B$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ , т.е.  ~~$AB \{x \in A \vee x \in B\}$~~ .

**Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \setminus B$ , которое состоит из всех элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ , т.е.  ~~$AB \{x \in A \wedge x \notin B\}$~~ .

**Дополнением** множества  $A$  до множества  $B$  называется новое множество  ${}^C(A)B$ , которое состоит из всех элементов из  $B \setminus A$ , т.е.  ~~$AB \{x \in B \wedge x \notin A\}$~~ .

**Симметрической разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \Delta B$ , являющееся объединением разностей множеств  $AB$  и  $BA$ , то есть  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Выполнение операций с множествами удобно иллюстрировать на кругах Эйлера.



Пример:

Пусть  $X = \{a, \bar{b}\}$ , а  $Y = \{a, \bar{b}, c\}$ , тогда  $X \cup Y = \{a, \bar{b}, c\}$ ,  $X \cap Y = \{a\}$ ,  $X \setminus Y = \{\bar{b}\}$ ,  $C(X)_Y = \{c\}$ ,  $C(Y)_X = \{\bar{b}\}$ .

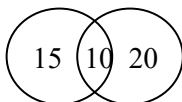
С помощью кругов Эйлера можно доказать следующие **свойства множеств**, справедливые для произвольных множеств  $A, B, C$  и  $D$ :

- 1)  $A \cup B = B \cup A$  (коммутативность объединения);
- 2)  $A \cap B = B \cap A$  (коммутативность пересечения);
- 3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (ассоциативность объединения);
- 4)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (ассоциативность пересечения);
- 5)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (дистрибутивность объединения);
- 6)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (дистрибутивность пересечения);
- 7)  $A \cup A = A$ ;
- 8)  $A \cap A = A$ ;
- 9)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 10)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- 11)  $A \setminus B \subset A$ ;
- 12)  $A \subset A \cup B$  и  $B \subset A \cup B$ ;
- 13)  $A \cap B \subset A$  и  $A \cap B \subset B$

Пример:

В бригаде 25 человек. Среди них 20 моложе 30 лет, 15 старше 20 лет. Может ли так быть?

Решение: Может! Пусть  $A$  – множество членов бригады моложе 30 лет.  $B$  – множество членов бригады старше 20 лет.  $C$  – множество всех членов бригады.  $C = A \cup B$ . Так как  $20+15 > 25$ , то  $A \cap B \neq \emptyset$ .



Из рисунка видно, что  $A \cap B$  составляет  $(15+20) - 25 = 10$  человек.

Тогда  $A$  состоит из  $15 - 10 = 5$  членов,  
 $B$  состоит из  $20 - 10 = 10$  членов.

**Декартовым произведением** множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \times B$ , элементами которого являются всевозможные пары  $(a; b)$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ , т.е.  $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$ .

Задания для самостоятельного решения

Задание 1.



### Способы задания множеств

Задайте перечислением множества

- а) Множество всех гласных букв русского алфавита
- б) Множество цифр десятичной системы счисления
- в)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0\}$ ;
- г)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$ ;
- д)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Задание 2.

- а) Найдите мощность множества  $F = \{10, 20 \dots 90\}$
- б) Найдите мощность множества цветов радуги.
- в) Найдите мощность множества времени года.

Задание 3.

- 1. Привести пример таких множеств  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , что  $A \in B$ ,  $B \in C$  и  $A \in C$ .
- 2. Привести пример таких множеств  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , что  $A \in B$ ,  $B \in C$  и  $A \notin C$ .

Задание 4.

Приведите пример множества, равного множеству  $A = \{d, h, j, p, t\}$

Задание 5.

Запишите несколько подмножеств для множеств:

- а)  $D = \{10, 11, 12 \dots 98, 99\}$  – множество натуральных двузначных чисел,
- б)  $F = \{10, 20 \dots 90\}$  – множество чисел, оканчивающихся нулем.

Установите число подмножеств каждого множества

Может ли у множества быть:

- в) 0 подмножеств;
- г) 7 подмножеств;
- д) 16 подмножеств.

Приведите примеры

Задание 6.

Множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ . Чему равны множества  $A \cup B$  и  $A \cap B$ ?

Задание 7.

Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств  $A$  и  $B$ , если

- а)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ;
- б)  $A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}$ ,  $B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$ ;

Задание 8.

Даны следующие числовые множества:  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ,  $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$ ,

$C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$ . Найдите множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

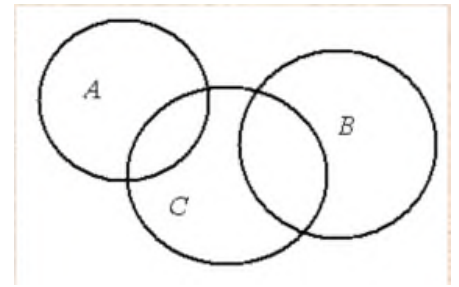
- е)  $(A \cup C) \Delta B$ ;
- ж)  $(A \cap C) \setminus B$ ;
- з)  $C \setminus B \Delta A$ ;

и)  $A \cap B \cap C$ ;

Задание 9.

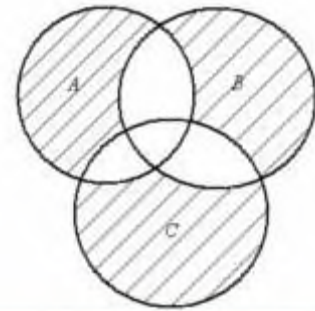
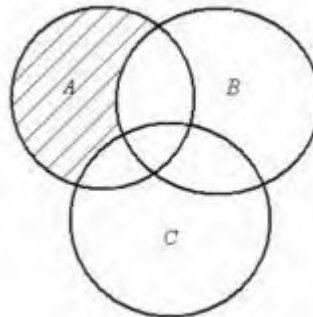
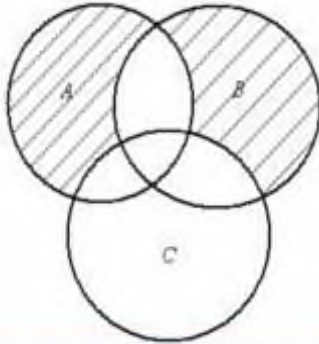
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

- к)  $(A \cup B) \setminus C$ ;
- л)  $(A \cap B) \cup (C \Delta B)$ ;
- м)  $(A \Delta B) \cap (C \setminus B)$ ;



Задание 10.

Записать множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:



Задание 11.

На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

**Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическое занятие № 2.

### Доказательство тождеств с помощью законов алгебры множеств

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Задача 1. Доказать и проиллюстрировать на примере множеств  $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 18\}$ ,  $B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  тождество алгебры множеств, выражающее закон ассоциативности операции пересечения множеств.

Решение. Для доказательства тождества  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  докажем два включения:  $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$  и  $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ .

1) Пусть  $x \in (A \cap B) \cap C$ , тогда последовательно получаем

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ x \in C, \end{cases} \quad \begin{cases} x \in A, \\ x \in B, \\ x \in C, \end{cases} \quad \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \cap C, \end{cases}$$

следовательно,  $x \in A \cap (B \cap C)$ ;

2) аналогично доказывается второе включение: пусть  $y \in A \cap (B \cap C)$ , тогда

$$\begin{cases} y \in A, \\ y \in B \cap C, \end{cases} \quad \begin{cases} y \in A, \\ y \in B, \\ y \in C, \end{cases} \quad \begin{cases} y \in A \cap B, \\ y \in C. \end{cases}$$

Окончательно получаем, что  $y \in (A \cap B) \cap C$ .

Тем самым тождество доказано.

Убедимся в верности равенства  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  на примере данных множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Вычислим:  $B \cap C = \{1, 5\}$ ,  $A \cap (B \cap C) = \{5\}$ ;  $A \cap B = \{5\}$ ,  $(A \cap B) \cap C = \{5\}$ . Очевидно, что  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

Задача 2. Доказать, что эквивалентны три предложения о произвольных множествах  $A$ ,  $B$  и  $C$ : 1)  $A \subseteq B$ ; 2)  $A \cap B = A$ ; 3)  $A \cup B = B$ .

Решение. Докажем, что из первого предложения следует второе. Действительно, так как  $A \cap B \subseteq A$ , то осталось показать, что  $A \subseteq A \cap B$ . Но если  $x \in A$ , то  $x \in B$ . В самом деле,  $A \subseteq B$ . Следовательно,  $x \in A \cap B$ .

Докажем, что из второго предложения следует третье. Так как  $A \cap B = A$ , то  $A \cup B = (A \cap B) \cup B$ . По закону поглощения  $B \cup (A \cap B) = B$ . Отсюда по закону коммутативности получаем  $A \cup B = B$ .

Докажем теперь, что из третьего предложения следует первое. Так как  $A \subseteq A \cup B$ , а по условию третьего предложения  $A \cup B = B$ , то  $A \subseteq B$ .

*Задачи для самостоятельного решения*

1. Доказать тождества:

а)  $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ ;

б)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ ;

в)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ;

г)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ ;

д)  $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ ;

е)  $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

ж)  $A + B = B + A$ ;

з)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .

2. Даны множества  $A, B$  и  $C$  такие, что  $C \subseteq B$ . Доказать, что:

а)  $A \cap C \subseteq A \cap B$ ;

б)  $C \setminus A \subseteq B \setminus A$ ;

в)  $A \cup C \subseteq A \cup B$ .

**Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

### Практическое занятие № 3.

#### Создание базы знаний «Королевская династия» с помощью предикатов и множеств.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.3. Реализовывать базу данных в конкретной системе управления базами данных.

#### Краткая теория

*Экспертная система* создается с целью подменить собой специалистов в данной области. Это достигается накоплением *базы знаний* известных фактов вместе с определением набора *правил вывода*. Вследствие чего ответы на запросы системы могут быть выведены логическим путем из базы знаний.

Мы построим простую экспертную систему «КОРОЛЕВСКАЯ ДИНАСТИЯ» для ответа на вопросы об английских королях и королевах и их семьях, начиная с Георга I. Прежде всего мы подготовим список фактов, используя предикаты *родитель* и *жена*.

Мы построим простую экспертную систему «КОРОЛЕВСКАЯ ДИНАСТИЯ» для ответа на вопросы об английских королях и королевах и их семьях, начиная с Георга I. Прежде всего мы подготовим список фактов, используя предикаты *родитель* и *жена*.

<i>родитель</i> (Георг I, Георг II)	<i>жена</i> (София, Георг I)
<i>родитель</i> (Георг III, Георг IV)	<i>жена</i> (Вильгельмина, Георг II)
<i>родитель</i> (Георг III, Вильгельм IV)	<i>жена</i> (Шарлотта, Георг III)
<i>родитель</i> (Георг III, Эдвард)	<i>жена</i> (Каролина, Георг IV)
<i>родитель</i> (Эдвард, Виктория)	<i>жена</i> (Аделаида, Вильгельм IV)
<i>родитель</i> (Виктория, Эдвард VII)	<i>жена</i> (Виктория, Альберт)
<i>родитель</i> (Эдвард VII, Георг V)	<i>жена</i> (Александра, Эдвард VII)
<i>родитель</i> (Георг V, Эдвард VIII)	<i>жена</i> (Виктория Мари, Георг V)
<i>родитель</i> (Георг V, Георг VI)	<i>жена</i> (Елизавета, Георг VI)
<i>родитель</i> (Георг VI, Елизавета II)	<i>жена</i> (Елизавета II, Филипп)
<i>родитель</i> (Виктория, Элис)	
<i>родитель</i> (Элис, Виктория Альберта)	
<i>родитель</i> (Виктория Альберта, Элис-Моунтбаттен)	
<i>родитель</i> (Элис-Моунтбаттен, Филипп)	

Условимся, что *родитель*( $x$ ,  $y$ ) означает, что  $x$  является родителем  $y$ , а *жена*( $x$ ,  $y$ ) означает, что  $x$  — жена  $y$ . Это стандартное чтение предикатов, используемых языками программирования, такими, как, например, PROLOG.

Чтобы извлечь информацию, мы будем ставить вопросы перед базой данных. Например, если мы спрашиваем: «является ли Георг I отцом Георга III?», то ответ будет отрицательным, поскольку предикат *родитель*(Георг I, Георг III) отсутствует в нашем списке фактов.

Запросы записываются в виде: «? — предикат». Кроме того предполагается, что наличие переменной в предикате равносильно вопросу о существовании. Например, запрос «? — *жена*( $x$ , Георг IV)» понимается как «была ли жена у Георга IV?». В этом случае ответ положителен, так как, заменяя  $x$  на «Каролина», мы получим высказывание, присутствующее в списке фактов.

**Задача 1.** Найдите ответы на следующие запросы:

(а) ? — *жена*(Елизавета II, Филипп);

(б) ? — *родитель*(София, Георг II);

**Решение.** Положительный ответ будет выдан только на первый запрос, так как только для него в списке фактов есть соответствующий предикат. Напомним, что отрицательный ответ на запрос дается в том случае, если список фактов не содержит предиката из запроса.

Чтобы система с базой знаний могла решать более сложные задачи, мы введем так называемые правила вывода. Правило вывода определяет новый предикат в терминах тех, которые присутствуют в исходном списке фактов. Ответы на запросы о новых предикатах могут быть логически выведены из списка фактов, генерируя, таким образом, новую информацию.

В системе «КОРОЛЕВСКАЯ ДИНАСТИЯ» кажется очевидным, что переменная  $x$ , попавшая в *жена*( $x$ ,  $y$ ), соответствует женщине. В правиле (1) определим новый предикат, который будет означать, что «если  $x$  — жена  $y$ , то  $x$  — женщина».

(1) *женщина*( $x$ ) **from** *жена*( $x$ ,  $y$ ).

Аналогично, введем правило (2), определяющее предикат *муж*. Он означает, что «если  $x$  — жена  $y$ , то  $y$  — муж  $x$ ».

**Задача 2.** Как изменятся ответы на запросы из задачи 1? Ответьте на следующие дополнительные запросы:

(в) ? — *женщина*(Элис-Моунтбаттен);

(г) ? — *муж*(Альберт, Виктория);

На запрос (в) ответ будет отрицателен, так как Элис-Моунтбаттен в основном списке не упомянута в качестве чьей-либо жены.

Ответ в случае (г) — положителен, ввиду наличия в списке предиката *жена*(Виктория, Альберт) и правила (2).

Подходящее правило вывода, дающее информацию о принадлежности к мужской половине человечества, аналогично правилу (1):

(3) *мужчина*( $y$ ) **from** *жена*( $x, y$ )

Можно сформулировать правило, представляющее информацию о сыновьях:

(3) *сын*( $x, y$ ) **from** (*мужчина*( $x$ ) **и** *родитель*( $y, x$ ))

**Задача 3.** Ответьте на следующие запросы:

- (а) ? — *мужчина*(Вильгельм IV);
- (б) ? — *сын*(Вильгельм IV, Георг III);
- (в) ? — *сын*(Вильгельм IV, Шарлотта);
- (г) ? — *сын*(Эдвард VIII, Георг V).

**Решение.**

- (а) Положительный ответ следует из предиката *жена*(Аделаида, Вильгельм IV) по правилу (3).
- (б) Положительный ответ следует из предиката *родитель*(Георг III, Вильгельм IV) ввиду положительного ответа на запрос (а) и правила вывода (4).

Ответы на последние два запроса — отрицательны.

Обратите внимание, что при ответах на (в) и (г) необходимо твердо придерживаться фактов и правил вывода, ввиду ограничений, наложенных на систему. Только монархи считаются родителями, в то время как их супруги появляются только в предикате *жена*. Так, хотя Шарлотта была замужем за Георгом III, и Вильгельм IV — один из их сыновей, база данных считает его родителем только Георга III. Следовательно, правило вывода (4) не может дать положительный ответ на запрос (в). Причина отрицательного ответа в случае (г) заключается в том, что в списке отсутствует жена у Эдварда VIII. Поэтому правило (3) дает ответ «Нет» на запрос «? — *мужчина*(Эдвард VIII)».



Как мы увидели, в случае неполной информации, содержащейся в системе данных, как это часто бывает в реальных экспертных системах, то отрицательный ответ на запрос может означать, что нам просто ничего не известно. Должное внимание к формулировке правил вывода и выбору исходных предикатов базы данных может частично решить эту проблему. К сожалению, при неопределенности отрицательных ответов мы не можем полностью доверять и положительным, если в предикатах участвует операция **не**.

Рассмотрим, например, следующие, разумные на первый взгляд правила вывода (A) и (B):

(A) *мужчина*( $x$ ) **from** *жена*( $x, y$ );

(B) *женщина*( $x$ ) **from** (**не** *мужчина*( $x$ )).

Попробуем ответить на запрос: «? — *женщина*(Эдвард VIII)», основываясь на исходном списке фактов, но пользуясь только правилами (A) и (B). На запрос «? — *женщина*(Эдвард VIII)» будет получен отрицательный ответ. Поэтому высказывание «**не** *женщина*(Эдвард VIII)» становится выведенным истинным фактом. По правилу (B) на запрос «? — *женщина*(Эдвард VIII)» будет дан положительный ответ! Следовательно, прежде чем разрешать употребление отрицаний в правилах вывода, необходимо убедиться в полноте исходной информации.

*Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 1.** Найдите ответы на следующие запросы:

(а) ? — *женщина*(Каролина);

(б) ? — *жена*(Филипп, Елизавета II).

Ответ сформулируйте и обоснуйте его аналогично первой задачи разобранной в теории.

**Задача 2.** Как изменятся ответы на запросы из задачи 1? Ответьте на следующие дополнительные запросы:

(в) ? — *мужчина*(Альберт)

Ответ сформулируйте и обоснуйте его аналогично второй задачи разобранной в теории, после введения правила (2).

### **Критерии оценивания практического занятия:**

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти не на все



заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

## Практическое занятие № 4

### Бинарные отношения.

#### Отношения эквивалентности и частичного порядка

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

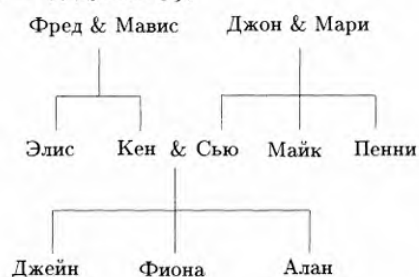
ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

#### Краткая теория

Бинарным отношением между множествами  $A$  и  $B$  называется подмножество  $R$  прямого произведения  $A \times B$ . В том случае, когда  $A = B$ , мы говорим просто об отношении  $R$  на  $A$ .

Пример 1 Рассмотрим генеалогическое древо, изображенное на рисунке. Выпишите упорядоченные пары, находящиеся в следующем отношении на множестве  $P$  членов этой семьи:

(а)  $R = \{(x, y) : x \text{ — дедушка } y\}$ ;



Решение.

$R$  содержит упорядоченные пары: (Фред, Джейн), (Фред, Фиона), (Фред, Алан), (Джон, Джейн), (Джон, Фиона) и (Джон, Алан).

Пример 2. Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующему бинарному отношению на множествах  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  и  $B = \{2, 4, 6\}$ :  $U = \{(x, y) : x + y = 9\}$

Решение.  $U$  состоит из пар: (3, 6), (5, 4) и (7, 2)

Пример 3. Множество  $R = \{(x, y) : x \text{ — делитель } y\}$  определяет отношение на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежавшие.

Решение.  $R$  состоит из пар: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5) и (6, 6).

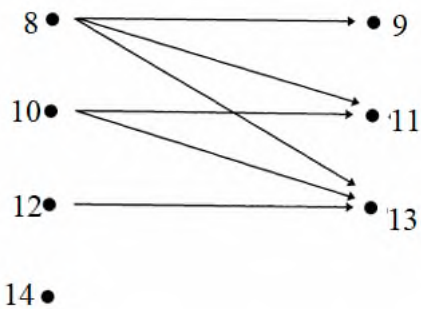
Теперь мы познакомимся с двумя более удобными способами перечисления упорядоченных пар, принадлежавших данному отношению.

Первый из них основан на понятии «ориентированный граф», а второй опирается на матрицы.

Пусть  $A$  и  $B$  — два конечных множества и  $R$  — бинарное отношение между ними. Мы изобразим элементы этих множеств точками на плоскости. Для каждой упорядоченной пары отношения  $R$  нарисуем стрелку, соединяющую точки, представляющие компоненты

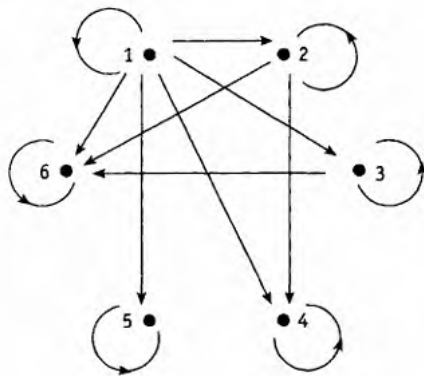
пары. Такой объект называется ориентированным графом или орграфом, а точки же, изображающие элементы множеств, принято называть вершинами графа.

В качестве примера рассмотрим отношение  $V = \{(x, y) : x < y\}$  между множествами  $A = \{8, 10, 12, 14\}$  и  $B = \{9, 11, 13\}$ . Соответствующий ориентированный граф показан ниже на рисунке:



Для иллюстрации отношения на отдельном множестве  $A$  мы чертим орграф, чьи вершины соответствуют одному лишь множеству  $A$ , а стрелки, как обычно, соединяют элементы упорядоченных пар, находящихся в отношении.

Пример 4. Изобразите граф, представляющий отношение  $R$  из примера 3. Решение. Поскольку  $R$  — отношение на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , то ориентированный граф будет иметь шесть вершин. Он приведен на рисунке ниже:



Второй способ задания бинарного отношения на конечных множествах основан на использовании таблиц. Предположим, что мы хотим определить бинарное отношение  $R$  между множествами  $A$  и  $B$ . Необходимо обозначить элементы множеств и выписать их в каком-нибудь порядке. Сделаем это так:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Для определения отношения  $R$  заполним таблицу  $M$  с  $n$  строками и  $m$  столбцами. Строки «перенумеруем» элементами множества  $A$ , а столбцы — элементами множества  $B$  в соответствии с порядком, в котором мы выписали элементы. Ячейку таблицы, стоящую на пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца будем обозначать через  $M(i, j)$ , а заполнять ее будем следующим образом:

$$\begin{aligned} M(i, j) &= \text{И, если } (a_i, b_j) \in R, \\ M(i, j) &= \text{Л, если } (a_i, b_j) \notin R, \end{aligned}$$

Такого сорта таблицы называются  $n \times m$  матрицами.

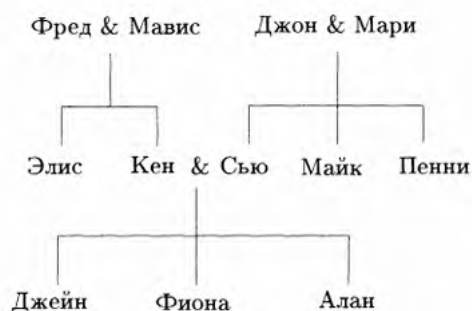
В этих терминах, отношение  $U$  из примера 2(а) с помощью матрицы задается следующим образом:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрите генеалогическое древо, изображенное на рисунке. Выпишите упорядоченные пары, находящиеся в следующих отношениях на множестве  $P$  членов этой семьи:

(а)  $S = \{(x, y) : x \text{ — сестра } y\}$ .



2. Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующему бинарному отношению на множествах  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  и  $B = \{2, 4, 6\}$ :  $V = \{(x, y) : x < y\}$

3. Множество  $R = \{(x, y) : x \text{ — делитель } y\}$  определяет отношение на множестве  $A = \{1, 3, 6, 7, 9, 11\}$ . Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежавшие, и постройте соответствующий ориентированный граф

4. Рассмотрите отношение  $V = \{(x, y) : x < y\}$  между множествами  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  и  $B = \{2, 4, 6\}$  и постройте соответствующий ориентированный граф.

5. Отношение  $R$  на множестве  $A = \{a, b, c, d\}$  задается матрицей:

$$\begin{bmatrix} Л & И & И & Л \\ Л & Л & И & И \\ Л & И & Л & Л \\ И & И & Л & И \end{bmatrix}$$

порядок строк и столбцов в которой соответствует порядку выписанных элементов множества A. Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие R.

**Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическое занятие № 5

### Отношения эквивалентности и частичного порядка

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

### Краткая теория

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение на множестве  $A$  называется отношением эквивалентности.

Отношение эквивалентности в некотором смысле обобщает понятие равенства. Эквивалентные элементы (т. е. находящиеся в отношении эквивалентности), как правило, обладают какими-то общими признаками.

Приведем примеры отношения эквивалентности.

– Отношение «... имеет те же углы, что и ...» на множестве всех треугольников. Очевидно, треугольники эквивалентны относительно этого отношения тогда и только тогда, когда они подобны.

– Отношение «... имеет тот же возраст, что и ...» на множестве всех людей. «Эквивалентные» люди принадлежат к одной и той же возрастной группе.

Примеры наводят на мысль, что если на множестве задано отношение эквивалентности, то все его элементы можно естественным способом разбить на непересекающиеся подмножества. Все элементы в любом из таких подмножеств эквивалентны друг другу в самом прямом смысле. Наличие такого разбиения — движущая сила любой классификационной системы.

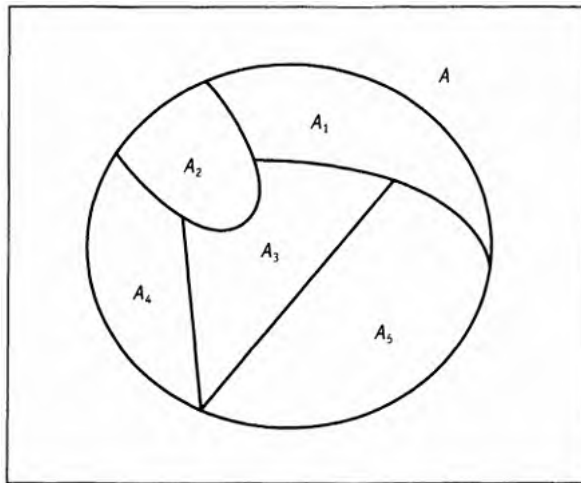
*Разбиением* множества  $A$  называется совокупность непустых подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множества  $A$ , удовлетворяющих следующим требованиям:

$$1) A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n;$$

$$2) A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Подмножества  $A_i$  называются блоками разбиения. Диаграмма Венна разбиения множества  $A$  на пять блоков показана на рисунке ниже.

Заметим, что блоки изображены как лоскуты, не пересекающиеся друг с другом. Это связано с тем, что блоки разбиения не могут иметь общих элементов.



Отношение эквивалентности  $R$  на множестве  $A$  задает на нем разбиение. Блоки разбиения при этом состоят из эквивалентных друг другу элементов.

Определим класс эквивалентности  $E_x$  произвольного элемента  $x$ , принадлежащего  $A$ , как подмножество  $E_x = \{z \in A : z R x\}$ .

**Теорема.** Пусть  $R$  — отношение эквивалентности на непустом множестве  $A$ . Тогда различные классы эквивалентности определяют разбиение  $A$ .

**Пример 1.** Отношение  $R$  на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  задано условием:  $x R y$ , если и только если  $x - y$  — целое число. Докажите, что  $R$  — отношение эквивалентности и опишите классы эквивалентности, содержащие  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\sqrt{2}$ .

**Решение.** Так как  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$  для любого вещественного числа  $x$ , отношение  $R$  рефлексивно. Если  $x - y$  число целое, то и противоположное к нему  $y - x = -(x - y)$  является целым. Следовательно,  $R$  — симметричное отношение. Пусть  $x - y$  и  $y - z$  — целые числа. Тогда  $x - z = (x - y) + (y - z)$  — сумма целых чисел, т. е. целое число. Это означает, что  $R$  транзитивно.

Итак, мы показали, что  $R$  рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно,  $R$  — отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности  $E_x$  произвольного вещественного числа  $x$  определяется по формуле:

$$E_x = \{z \in \mathbb{R} : z - x \text{ — целое число}\}.$$

Поэтому,

$$E_0 = \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}} &= \{z \in \mathbb{R} : z - \frac{1}{2} \text{ — целое число}\} = \\ &= \{\dots, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\sqrt{2}} &= \{z \in \mathbb{R} : z - \sqrt{2} \text{ — целое число}\} = \\ &= \{\dots, -1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \dots\}. \end{aligned}$$

Рефлексивное, транзитивное, но кососимметричное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *частичным порядком*. Частичный порядок важен в тех ситуациях, когда мы хотим как-то охарактеризовать старшинство. Иными словами, решить при каких условиях считать, что один элемент множества превосходит другой.

Примеры частичных порядков.

- « $\leq$ » на множестве вещественных чисел;
- « $\subset$ » на подмножествах универсального множества;
- «... делит ...» на множестве натуральных чисел.

Множества с частичным порядком принято называть *частично упорядоченными* множествами.

Если  $R$  — отношение частичного порядка на множестве  $A$ , то при  $x \neq y$  и  $x R y$  мы называем  $x$  *предшествующим элементом* или *предшественником*, а  $y$  — *последующим*. У произвольно взятого элемента  $y$  может быть много предшествующих элементов. Однако если  $x$  предшествует  $y$ , и не существует таких элементов  $z$ , для которых  $x R z$  и  $z R y$ , мы называем  $x$  *непосредственным предшественником*<sup>1</sup>  $y$  и пишем  $x \prec y$ .

Непосредственных предшественников можно условно изобразить с помощью графа, известного как *диаграмма Хассе*. Вершины графа изображают элементы частично упорядоченного множества  $A$ , и если  $x \prec y$ , то вершина  $x$  помещается ниже вершины  $y$  и соединяется с ней ребром.

Диаграмма Хассе выдаст полную информацию об исходном частичном порядке, если мы не поленимся подняться по всем цепочкам ребер.

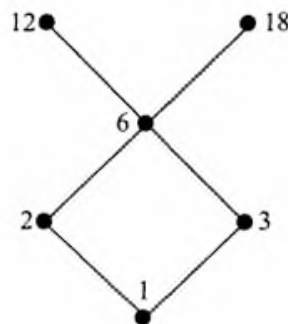


**Пример 2.** Дано, что отношение «... делитель ...» определяет частичный порядок на множестве  $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ . Составьте таблицу предшественников и непосредственных предшественников, после чего постройте соответствующую диаграмму Хассе.

**Решение.** Таблица и диаграмма приведены ниже.

Таблица 4.1

элемент	предшественник	непосредственный предшественник
1	нет	нет
2	1	1
3	1	1
6	1, 2, 3	2, 3
12	1, 2, 3, 6	6
18	1, 2, 3, 6	6



Линейным порядком на множестве  $A$  называется отношение частичного порядка, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий.

Различные сортирующие процедуры в информатике требуют, чтобы элементы сортируемых множеств были линейно упорядочены. В этом случае они могут выдавать упорядоченный список. Другие приложения используют частичный порядок, предполагая, что в любом частично упорядоченном множестве найдется минимальный элемент (не имеющий предшественников) и максимальный (не имеющий последующих элементов).

Частично упорядоченное множество из примера 2 обладает одним минимальным элементом, а именно, числом 1. С другой стороны, в нем есть два максимальных: 12 и 18. В этом множестве содержится несколько линейно упорядоченных подмножеств. Каждое из них соответствует цепочке ребер на диаграмме Хассе. Например, множество  $\{1, 2, 6, 18\}$  линейно упорядочено относительно отношения «...делитель...».

*Задачи для самостоятельного решения*

1. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве  $A$  опишите блоки, на которые разбивается множество  $A$ :

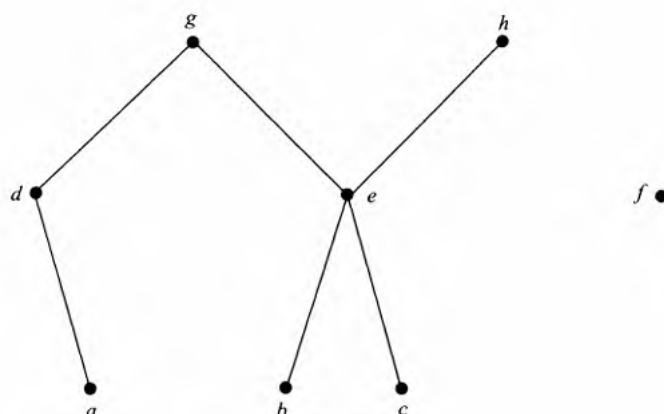
- (а)  $A$  — множество книг в библиотеке, а  $R$  определяется условием:  $x R y$ , если и только если цвет переплета  $x$  совпадает с цветом переплета  $y$ ;
- (б)  $A = \mathbb{Z}$ ,  $R$  задается условием:  $x R y$  тогда и только тогда, когда  $x - y$  — четное число;
- (в)  $A$  — множество людей, и  $x R y$ , если  $x$  имеет тот же пол, что и  $y$ ;
- (г)  $A = \mathbb{R}^2$ ,  $R$  задается по правилу:  $(a, b) R (c, d)$  в том случае, когда  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ .

2. Отношение  $R$  на множестве  $\mathbb{Z}$  определяется так:  $x R y$  в том и только том случае, когда  $x^2 - y^2$  делится на 3. Покажите, что  $R$  является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.

3. Нарисуйте диаграмму Хассе для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:

- (а) множество  $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  с отношением « $x$  делит  $y$ »;
- (б) множество всех подмножеств в  $\{1, 2, 3\}$  с отношением « $X$  — подмножество  $Y$ ».

4. Диаграмма Хассе частичного порядка  $R$  на множестве  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  показана на рис. 4.6. Перечислите элементы  $R$  и найдите минимальный и максимальный элементы частично упорядоченного множества  $A$ .



5. Лексикографический (алфавитный) порядок работает следующим образом: у данных слов  $X$  и  $Y$  сравниваем букву за буквой, оставляя без внимания одинаковые, пока не найдем пару разных. Если в этой паре буква слова  $X$  стоит раньше (по алфавиту), нежели соответствующая буква слова  $Y$ , то  $X$  предшествует  $Y$ ; если все буквы слова  $X$  совпадают с соответствующими буквами  $Y$ , но оно короче, то  $X$  предшествует  $Y$ , в противном случае,  $Y$  предшествует  $X$ .

Упорядочите следующие слова лексикографически: *бутылка*, *банан*, *бисквит*, *бивень* и *банджо*. Объясните, почему Вы выбрали именно такой порядок.

#### **Критерии оценивания практического занятия:**

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти не на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

## Практическое занятие № 5

### Применение n-арных таблиц для описания системы управления базами данных

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.3. Реализовывать базу данных в конкретной системе управления базами данных.

Данные, хранящиеся в компьютере, называются базой данных. Про граммы, с помощью которых пользователь извлекает информацию из базы данных или вносит в нее изменения, называются системами управления базами данных (СУБД).

Таблица 1 T1 = Персональные данные

Личный номер	Фамилия	Пол	Дата рожд.	Семейное положение	Адрес
4000123	Джонс	Ж	1.2.83	не замужем	2 Мотт, Ньютон
5001476	Сингх	М	4.5.84	женат	4А Ньюаод, Сифорт
5112391	Смит	Ж	21.3.84	не замужем	17 Креснт, Сифорт
5072411	Смит	М	12.12.84	холост	21 Паддинг Лэйн, Витэм
5532289	Чинг	М	15.8.83	холост	4А Ньюаод, Сифорт
5083001	Грант	М	9.7.83	женат	18 Иффлейроад, Сифорт
5196236	Маккай	Ж	21.3.84	не замужем	133 Уффроад, Реадинг
4936201	Френк	Ж	7.10.77	замужем	11 Финнроад, Ньютон

Данные в компьютере, как правило, организованы в виде таблиц.

Например, табл. 1 содержит информацию о группе студентов: личный номер студента, фамилию, пол, дату рождения, семейное положение и адрес.

Таблица 2 T2 = Успеваемость

Фамилия	Основы матем.	Прогр.	Дискр. матем.	Вычисл. системы
Каммингс	отл	хор	удовл	отл
Джонс	хор	удовл	хор	неуд
Грант	удовл	хор	отл	удовл
Сингх	удовл	хор	отл	неуд
Френк	неуд	неуд	удовл	удовл
Маккай	отл	отл	хор	отл
Куксон	удовл	отл	отл	хор

В табл.2 занесена информация об успеваемости некоторых студентов по отдельным курсам. Эти таблицы составят основу для наших обсуждений, хотя и не представляют практического интереса. Например, проблемы при работе с табл. 1 могут возникнуть при попытке извлечь информацию о двух различных Смитах, а в табл. 1 отсутствует детальная информация о некоторых из студентов, появляющихся в табл. 2.



Строки таблицы с  $n$  колонками, помеченными множествами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  можно представить как подмножество в прямом произведении  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Строки образуют список из  $n$  элементов, по одному из каждого  $A_i$ , а вся таблица представляет собой **n-арное отношение**.

Например, табл. 2 можно рассматривать как подмножество  $T2$  в  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ , где  $A_1$  — множество фамилий студентов, а  $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{\text{отл, хор, удовл, неуд}\}$ . Один из элементов этого пятинарного отношения — строка (Джонс, хор, удовл, хор, неуд), в которой записаны оценки Джонса, полученные им за четыре предмета.

Для извлечения информации и изменения содержания таблиц, со ответствующих набору отношений, мы определим несколько основных операций над ними, а именно: проект, соединение и выбор. Это только три из многочисленных операций, созданных для манипулирования базами данных, теория которых опирается на язык множеств, отношений и функций.

Операция проект формирует новую таблицу из определенных столбцов старой. Например, проект  $(T1, \{\text{Фамилия, Адрес}\})$  формирует таблицу 3.

Таблица 3 .  $T3 = \text{проект}(T1, \{\text{Фамилия, Адрес}\})$

Фамилия	Адрес
Джонс	2 Мотт, Ньютон
Сингх	4А Ньюраод, Сифорт
Смит	17 Креснт, Сифорт
Смит	21 Паддинг Лэйн, Витэм
Чинг	4А Ньюраод, Сифорт
Грант	18 Иффлейроад, Сифорт
Маккай	133 Уффроад, Реадинг
Френк	11 Финнроад, Ньютон

**Задача 1.** Найти

$\text{проект}(T2, \{\text{Фамилия, Основы матем., Дискр. матем.}\})$ .

**Решение.** Смотри табл. 4

Таблица 4

Фамилия	Основы матем.	Дискр. матем.
Каммингс	отл	удовл
Джонс	хор	хор
Грант	удовл	отл
Сингх	удовл	отл
Френк	неуд	удовл
Маккай	отл	хор
Куксон	удовл	отл

Операция **соединение** объединяет две таблицы в большую, выписывая в одну строку информацию, соответствующую общему атрибуту. Предположим, что  $R$  и  $S$  — отношения, представленные двумя таблицами, причем  $R$  — подмножество в прямом произведении  $A_1 \times \dots \times A_m \times B_1 \times \dots \times B_n$ , а  $S$  — в прямом произведении  $A_1 \times \dots \times A_m \times C_1 \times \dots \times C_p$ . В этом случае общие атрибуты представлены множествами  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Соединение  $R$  и  $S$  — это подмножество в  $A_1 \times \dots \times A_m \times B_1 \times \dots \times B_n \times C_1 \times \dots \times C_p$ , состоящее из элементов вида  $(a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_p)$ , где  $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$  лежит в  $R$ , а  $(a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_p)$  — в подмножестве  $S$ .

Например, **соединение**(ТЗ, Т2) дает табл. 5

Таблица 5

Фамилия	Адрес	Основы матем.	Прогр.	Дискр. матем.	Вычисл. системы
Джонс	2 Мотт, Ньютон	хор	удовл	хор	неуд
Грант	18 Иффлейроад, Сифорт	удовл	хор	отл	удовл
Сингх	4А Ньюроад, Сифорт	удовл	хор	отл	неуд
Френк	11 Финироад, Ньютон	неуд	неуд	удовл	удовл
Маккай	133 Уффроад, Реадинг	отл	отл	хор	отл

Операция **выбор** отбирает строки таблицы, удовлетворяющие подходящему критерию. Например, **выбор**(Т1, Пол = М и Семейное положение = Женат) верстает табл. 6

Таблица 6

Личный номер	Фамилия	Пол	Дата рожд.	Семейное положение	Адрес
5001476	Сингх	М	4.5.84	женат	4А Ньюроад, Сифорт
5083001	Грант	М	9.7.83	женат	18 Иффлейроад, Сифорт

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найдите **выбор**(Т2, Дискр. матем. = отл).

**Задача 2.** Найдите таблицу, которая получится в результате операций:

$R1 = \text{проект}(T2, \{\text{Фамилия, Прогр., Вычисл. системы}\});$

Задача 2.  $R2 = \text{выбор}(R1, \text{Вычисл. системы} = \text{отл или Прогр.} = \text{отл});$

Обоснуйте свои ответы.

**Критерии оценивания практического занятия:**

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все

заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

## Практическая работа №6, №7

### Представление высказываний с помощью логических формул.

### Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

### Краткая теория

Логика – наука о законах и формах мышления

Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно

Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение

Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

Алгебра логики – это наука об общих правилах и законах действий над логическими переменными и высказываниями.

Самой простой логической операцией является операция НЕ, по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT ( ). Если А – истинно, то  $\bar{A}$  – ложно и наоборот. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента. Логическая операция НЕ является унарной, т.е. действие выполняется над одним операндом. Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением.

Операция И (обозначается «И», «and», «&»,  $A \cdot B$ ) имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Таблица истинности  $F = A \wedge B$ :

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операция ИЛИ (обозначается «ИЛИ», «or»,  $A+B$ ,  $A \vee B$ ) называется дизъюнкцией или логическим сложением и дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Таблица истинности  $F = A \vee B$ :

A	B	$A \vee B$
---	---	------------



0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

Логическое следование: импликация – связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (А), а второе (В) – следствием из этого условия. Результатом импликации является ЛОЖЬ только тогда, когда условие А истинно, а следствие В ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ... , ТО ... Таблица истинности  $F = A \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая равнозначность: эквивалентность – определяет результат сравнения двух простых логических выражений А и В. Результатом эквивалентности является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности". Таблица истинности  $F = A \leftrightarrow B$ :

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении: 1. инверсия  $\rightarrow$  2. Конъюнкция  $\rightarrow$  3. Дизъюнкция  $\rightarrow$  4. Импликация  $\rightarrow$  5. Эквивалентность. Для изменения указанного порядка выполнения операций используются круглые скобки. Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

Штрих Шеффера,  $A|B$  или антиконъюнкция, по определению это отрицание конъюнкции  $F = A|B = \overline{A \wedge B}$

Стрелка Пирса,  $A \downarrow B$  или антидизъюнкция, по определению  $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$

Сумма по модулю два,  $A \oplus B$  или антиэквивалентность, по определению  $F = A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$ .

A	B	$A B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

#### Задание 1

- Определите,                    высказывание простое или сложное? Определите истинность сложного высказывания.

- Если сложное, то запишите его простые высказывания.

- Напишите ваше высказывание в виде логического выражения.

- Составить таблицу истинности сложного высказывания и в ней выделить строку, соответствующую определенной ранее истинности.

Решение

«Ты можешь купить в магазине продукты, если Москва - столица России или у тебя есть деньги.»

- Высказывание сложное, так как используется «если..., то...» и «или».

- Простые высказывания: A = «Москва - столица России» - и, B = «Ты можешь купить в магазине продукты» - и, C = «У тебя есть деньги» - и.

-  $A \rightarrow B \vee C$ . Так как в этой формуле все высказывания принимают значение истина, то дизъюнкция принимает значение истина и импликация будет истиной.

- Определим количество переменных – их 3, значит количество строк в таблице истинности  $= 2^3 + 1 = 9$  (каждый операнд принимает одно из двух значений – 0 или 1)

A	B	C	$B \vee C$	$A \rightarrow B \vee C$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

## Задание 2

Для заданного логического выражения:  $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow X)$ .

- построить таблицу истинности;
- составить сложное высказывание, если

X = «Красноярск расположен на Енисее»,

Y = «7 – простое число»,

Z = «Существуют иррациональные числа».

$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow X).$$

**Решение:**

$$1 \quad (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow X).$$

2 Составим таблицу истинности для исходного выражения:

X	Y	Z	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3. Если Красноярск расположен на Енисее, то 7 – простое число и, если 7 – простое число, то существуют иррациональные числа, тогда существуют иррациональные числа, если Красноярск расположен на Енисее.

Задание 3

Определите значения истинности следующих выражений.

«Если в треугольнике медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний».

Решение.

Выделим и обозначим истинность простых высказываний А: «В треугольнике медиана является высотой» - и

В: «В треугольнике медиана является биссектрисой» - и

С: «Этот треугольник равнобедренный» -и

Д: «Этот треугольник равносторонний» - л

Тогда данное высказывание символически записывается так:  $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \rightarrow (\bar{C} \wedge \bar{D})$

$(\bar{A} \wedge \bar{B})$  Конъюнкция лжи и лжи даст ложь

$(\bar{C} \wedge \bar{D})$  Конъюнкция лжи и истины будет ложь

Ложь импликация ложь, будет истина.

Ответ высказывание истинное

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

- Определите, высказывание простое или сложное? Определите истинность сложного высказывания.

- Если сложное, то запишите его простые высказывания.

- Напишите ваше высказывание в виде логического выражения.

- Составить таблицу истинности сложного высказывания и в ней выделить строку, соответствующую определенной ранее истинности.

1 вариант

1. Если число 17 нечетное и двузначное, то Москва - столица России.

2. Если Маша – сестра Саши, то Саша – брат Маши, тогда и только тогда, когда Луна есть спутник Марса.

3. Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхает, а Волга впадает в Каспийское море.

4. На уроке физики ученики выполняли лабораторную работу и сообщали результаты исследований учителю.
5. Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньги или число 28 не делится на число 7.
6. Если при замерзании воды выделяется тепло, то кислород - газ.
7. Неверно, что корова – хищное животное и математика – интересный предмет.

2 вариант

8. На уроке информатике необходимо соблюдать правила техники безопасности, когда картины Пикассо слишком абстрактны.
9. Если на улице дождь, то асфальт мокрый, а сегодня плохая погода.
10. Если компьютер включен, то можно на нем работать и Река Ангара впадает в озеро Байкал.
11. Катя любит писать сочинения или решать задачи.
12. Тише едешь – дальше будешь тогда и только тогда, когда треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'.
13. Если число делится на 2, то оно – четное и железо не тяжелее свинца.
14. Если Земля движется по круговой или эллиптической орбите, то в треугольнике все углы равны.

Задание 2. Для заданного логического выражения:

– построить таблицу истинности;

– составить сложное высказывание, если

A = «Красноярск расположен на Енисее»,

B = «5 – простое число»,

C = «Существуют рациональные числа».

1 вариант

- 1  $(A \leftrightarrow B) \vee \overline{AB} \vee C$
- 2  $(A \rightarrow B) \vee \overline{AC} \vee BC$
- 3  $(AC \rightarrow B) \vee \overline{AC}$
- 4  $\overline{AB} \vee (A \leftrightarrow C)B$
- 5  $(\overline{A} \rightarrow B) \wedge (\overline{AC} \vee BC)$
- 6  $(A \leftrightarrow C) \vee \overline{AB} \vee AC$
- 7  $(A \leftrightarrow C) \vee \overline{AB} \vee BC$

2 вариант

- 8  $(C \leftrightarrow B) \vee \overline{AC} \vee BC$
- 9  $(BC \rightarrow A) \vee \overline{AC}$
- 10  $(AB \rightarrow C) \vee \overline{AC}$
- 11  $(\overline{A} \rightarrow C) \wedge (\overline{BC} \vee AB)$
- 12  $(\overline{A} \leftrightarrow B) \wedge (A \rightarrow BC)$
- 13  $(B \rightarrow C) \vee \overline{AB} \vee \overline{AC}$
- 14  $(A \rightarrow \overline{BC}) \vee \overline{AB} \vee \overline{BC}$

Задание 3. Определите значения истинности следующих выражений

1 вариант

1. Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3.
2. Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3.
3. Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3.

4. Если 15 делится на 3, то 15 Делится на 6.
5. Если Саратов расположен на Неве, то белые медведи обитают в Африке.
6. 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3.
7. 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3.

2 вариант

8. 15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3.
9. 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4.
10. Тело массой  $m$  обладает потенциальной энергией  $mgh$  тогда и только тогда, когда оно находится на высоте  $h$  над поверхностью земли.
11. Ленинград расположен на Неве и  $2 + 3 = 5$ .
12. 7 - простое число и 9 - простое число.
13. 13 - простое число или 8 - простое число.
14. Число 2 четное или это число простое.

### **Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическая работа №8

### Построение логических схем

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

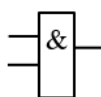
ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

### Краткая теория

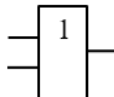
Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

- 1) логический элемент «И» – логическое умножение – конъюнктор;
- 2) логический элемент «ИЛИ» – логическое сложение – дизъюнктор;
- 3) логический элемент «НЕ» – инверсию – инвертор.

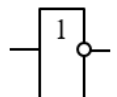
конъюнктор



дизъюнктор



инвертор

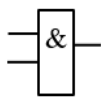


Задание 1. Построить логическую схему, соответствующую логическому выражению  $F(X, Y) = X \wedge Y \vee \neg(Y \vee X)$  Вычислить значения выражения для  $X = 1$ ,  $Y = 0$ .

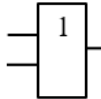
Решение:

1. Количество переменных – две:  $X$  и  $Y$ .
2. Логических операций – четыре: конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, дизъюнкция; последовательность их выполнения: 1 (конъюнкция), 2 (дизъюнкция – в скобках), 3 (инверсия), 4 (дизъюнкция):
3. Этим логическим операциям соответствуют базовые логические элементы соответственно:

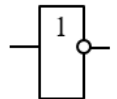
конъюнктор



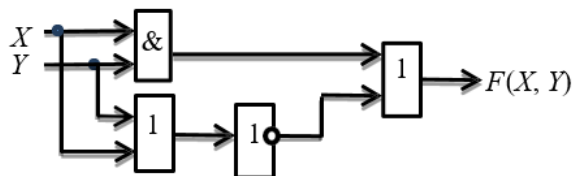
дизъюнктор



инвертор



4. Схему строим слева направо в соответствии с порядком логических операций:



5. Вычислим значение логического выражения

$$F(X, Y) = 1 \wedge 0 \vee \neg(0 \vee 1) = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Построить логическую схему функции  $F(A,B)$ :

1 вариант	2 вариант
$F(A,B)$	$F(A,B)$
$\neg(A \& B) \vee \neg(B \vee A)$	$\neg A \vee B \vee \neg(\neg B \vee A)$
$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$	$(\neg A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$
$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$	$(\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$
$\neg(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	$\neg(A \& (B \vee A) \wedge \neg B)$
$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)$	$\neg A \& B \vee \neg(A \vee B) \vee A$
$(\neg A \vee B) \wedge \neg(A \vee \neg B)$	$\neg(A \& B) \vee (\neg(B \vee C))$
$\neg(\neg A \& \neg B) \vee (A \vee B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$

**Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическая работа №9, №10

### Приведение формул логики к ДНФ и КНФ

#### Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ).

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

#### Краткая теория

Формула называется тождественно-истинной (тавтологией), если для любых наборов переменных она принимает значение И.

Формула называется тождественно-ложной, если для любых наборов переменных она принимает значение Л.

В алгебре высказываний используют две нормальные формы: дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы формулы (ДНФ и КНФ).

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Каждая формула, не равная тождественно Л, может быть приведена СДНФ, которая является единственной с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Каждая формула, не равная тождественно И, может быть приведена к СКНФ, которая является единственной с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы (СДНФ) это равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, обладающая свойствами:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все высказывания, входящие в формулу.
2. Все логические слагаемые формулы различны
3. Ни одно логическое слагаемое не содержит высказывание и его отрицание
4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одно и то же высказывание дважды.

.Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

- 1) Отметить те строки, в последнем столбце которых стоят из 0;
- 2) Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную, если =1, то ее отрицание;
- 3) Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию.

Задание 1

Построить таблицу истинности для высказывания:  $(x \vee y) \rightarrow (y \oplus z)$



построить СНДФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ

### Решение.

Строим таблицу истинности, с помощью которой устанавливается истинностное значение сложного высказывания при данных значениях входящих в него простых высказываний.

x	y	z	$\bar{y}$	$x \mid \bar{y}$	$y \oplus z$	$(x \mid \bar{y}) \rightarrow (y \oplus z)$
1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

По таблице составляем дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). ДНФ в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции нескольких конъюнктов.

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

1. Отметить те строки, в последнем столбце которых стоят 1;
2. Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную, если =0, то ее отрицание;
3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 1. В данном случае – это 2-ая, 3-ая, 4-ая, 6-ая и 7-ая строки.

Для каждой строки составляем конъюнкцию: если значение переменной равно 0, то берем ее отрицание, а если 1, то берем саму переменную. Затем составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) - \text{СДНФ}$$

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 0. В данном случае – это 1-ая, 5-ая, и 8-ая строки:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) - \text{СКНФ}$$

ДНФ называется минимальной, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ ей равносильных.

Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений. Соотношение склеивания:

$$(a \wedge b) \vee \overline{(a \wedge b)} = \underline{b}; \quad (a \vee b) \wedge \overline{(a \vee b)} = \underline{b}$$

Соотношение поглощения:

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

Используя соотношение склеивания получаем:

$$\overline{(x \wedge y \wedge z)} \vee (x \wedge y \wedge z) \equiv y \wedge z,$$

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \equiv x \wedge y.$$

Отсюда,

$$\overline{(x \wedge y \wedge z)} \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \equiv (\overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y) - \text{сокращенная ДНФ.}$$

*Задание для самостоятельной работы*

Построить таблицу истинности, найти СНДФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ для высказывания:

1 вариант

$$1. (\overline{z} \vee y) \rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})$$

$$2. \left( \overline{(A \wedge B)} \Rightarrow A \right) \Rightarrow A \vee B$$

$$3. (\overline{z} \vee y) \wedge (\overline{z} \oplus \overline{x})$$

$$4. (x|y) \rightarrow (x|z)$$

$$5. (\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (\overline{B} \oplus \overline{A}) \Leftrightarrow (A \vee B) \oplus (A \oplus \overline{B})$$

$$6. (\overline{z} \oplus y) \Rightarrow (\overline{z} | (y \vee \overline{x}))$$

2 вариант

$$1. \left( \overline{(A \wedge B)} \Rightarrow A \right) \Leftrightarrow (A \vee B)$$

$$2. (\overline{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{z} \vee \overline{x})$$

$$3. (\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow (\overline{B} \wedge \overline{A})$$

$$4. (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge (y \oplus z)$$

$$5. (\overline{z} \oplus x) \vee (\overline{z} | (y \vee \overline{x}))$$

$$6. (x \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})$$

**Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическая работа №11

### Сумма по модулю два и ее свойства. Многочлен Жегалкина

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

#### Краткая теория

Многочлены алгебры логики строятся по аналогии с обычными многочленами. Умножение заменяем конъюнкцией, а сложение альтернативной дизъюнкцией (сложением по модулю два).

Многочленом Жегалкина называется альтернативная дизъюнкция, каждый член которой представляет собой конъюнкцию переменных или переменные, или 1. Любая функция может быть представлена многочленом (полиномом) Жегалкина и это представление единственно. Функция является линейной, если многочлен Жегалкина не содержит конъюнкции переменных.

Задача 1

Записать булеву функцию  $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y}) \rightarrow (z \Leftrightarrow x)$  в виде многочлена Жегалкина. Определить является ли функция линейной.

Решение:

Преобразуем равенство, используя формулы алгебры логики.

$$\begin{aligned}(x \vee \bar{y}) \rightarrow (z \Leftrightarrow x) &= (x\bar{y} \oplus x \oplus \bar{y}) \rightarrow (z \oplus x \oplus 1) = \\&= (x\bar{y} \oplus x \oplus \bar{y})(z \oplus x \oplus 1) \oplus (x\bar{y} \oplus x \oplus \bar{y}) \oplus 1 = \\&= x\bar{y}z \oplus x\bar{y}x \oplus x\bar{y} \oplus xz \oplus x \oplus x \oplus \bar{y}z \oplus \bar{y}x \oplus \bar{y} \oplus x\bar{y} \oplus x \oplus \\&\oplus \bar{y} \oplus 1 = xz(y \oplus 1) \oplus x\bar{y} \oplus x\bar{y} \oplus xz \oplus (y \oplus 1)z \oplus \bar{y} \oplus x \oplus \\&\oplus \bar{y} \oplus 1 = xyz \oplus xz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus x \oplus 1 = xyz \oplus yz \oplus z \oplus x \oplus 1\end{aligned}$$

Функция не является линейной, т.к. многочлен Жегалкина содержит конъюнкции переменных.

Ответ: функция не является линейной; многочлен Жегалкина, соответствующий данной

функции:  $f(x, y, z) = xyz \oplus yz \oplus z \oplus x \oplus 1$

Задание для самостоятельной работы

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$$\bar{\bar{x}} = x \oplus 1; \quad x \oplus x = 0; \quad x \vee y = xy \oplus x \oplus y; \quad x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1; \quad x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$$

$$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1; \quad x | y = xy \oplus 1.$$

2. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции  $a \oplus b$ :

Ответы: а)  $ab \vee \bar{a}\bar{b}$  б)  $a\bar{b} \vee \bar{a}b$  в)  $\bar{a} \wedge \bar{b}$  г)  $\bar{a} \vee b$

3. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: а)  $x \vee y \oplus x \oplus 1$     б)  $x \oplus y$     в)  $x \vee y \oplus 1$     г)  $x \vee y \oplus x$

4. 1 вариант

1. Представить функцию  $f(x, y, z) = \overline{x \Rightarrow y \Rightarrow z}$  в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

2. Построить таблицу истинности для функции  $f(x, y, z) = \overline{xy \Rightarrow (z \vee x)}$ , найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

2 вариант

1. Представить функцию  $f(x, y, z) = \overline{x \vee y \vee (x \downarrow z)}$  в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

2. Построить таблицу истинности для функции  $f(x, y, z) = \overline{x \Leftrightarrow y \Rightarrow z}$ , найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

Представить в виде многочлена Жегалкина  $f(x, y, z) = \overline{x \vee y \vee (x \downarrow z)}$ , построить контактную схему, реализующую эту функцию.

#### **Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Практическая работа №12

### Решение задач на графы

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

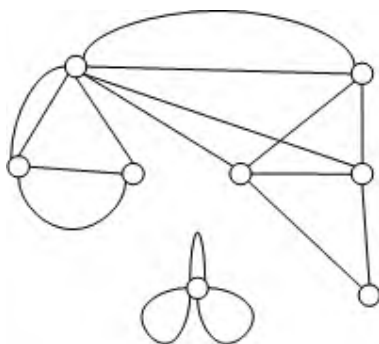
ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

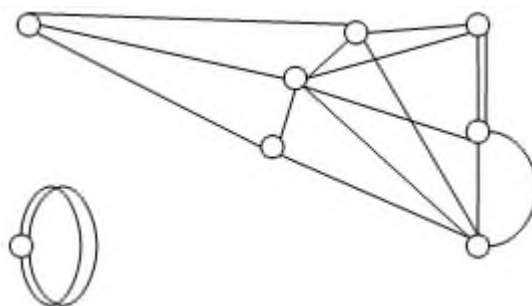
#### Задание 1

Найти инварианты неориентированных графов (число вершин, число ребер, число компонент связности, цикломатическое число, хроматическое число, плотность графа, вектор степеней вершин, матрицу смежности, матрицу инцидентий).

1 вариант



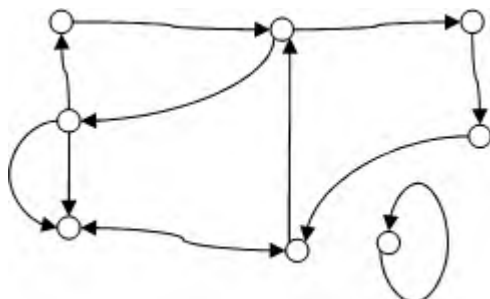
2 вариант



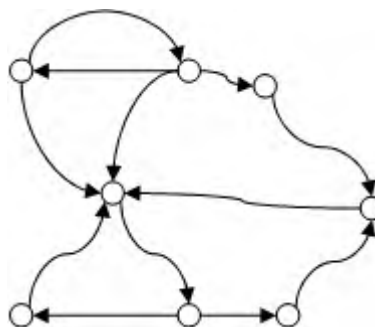
#### Задание 2

Найти инварианты ориентированных графов (число вершин, число дуг, число компонент связности, цикломатическое число, хроматическое число, плотность графа, вектор степеней вершин, матрицу смежности, матрицу инцидентий).

1 вариант



2 вариант

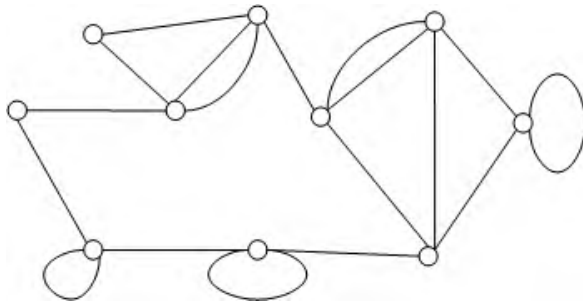


#### Задание 3

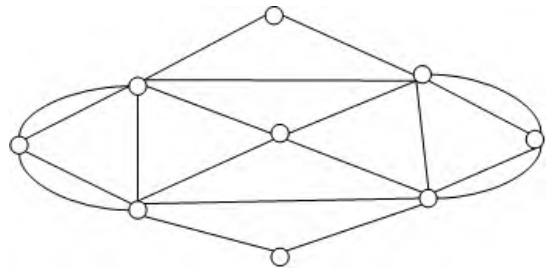
- 1) Проверить, является ли граф, изображенный на рисунке, эйлеровым или полуэйлеровым.
- 2) Найти эйлеров путь или эйлеров цикл.

- 3) Проверить наличие достаточного условия гамильтоновости графа, изображенного на рисунке, по теореме Дирака.
- 4) Найти гамильтонов путь или цикл, если они существуют.
- 5) Сделать вывод о гамильтоновости или полугамильтоновости заданного графа.

1 вариант



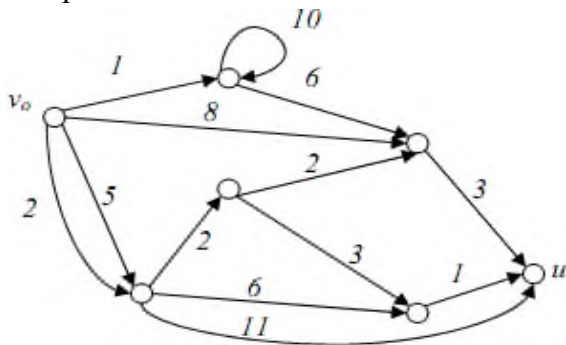
2 вариант



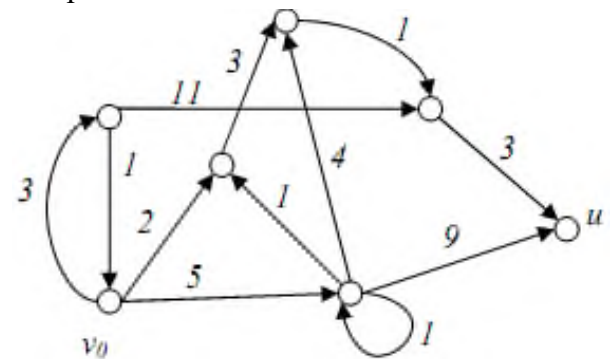
#### Задание 4

Найти кратчайший путь и его длину из вершины  $v_0$  в вершину  $u$ .

1 вариант



2 вариант



#### Критерии оценивания практической работы:

- Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;
- Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;
- Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;
- Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

### Практическая работа №13

#### Сортировка и поиск данных, организованных в деревья.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Двоичные деревья с корнем очень полезны при решении задач о выборе, в частности, о выборе такого сорта, при котором нужно классифицировать упорядоченные данные или вести в них поиск.

Упорядоченные данные, такие как множество чисел, упорядоченных по величине или множество строк литер, упорядоченных лексикографически (в алфавитном порядке), можно организовать в виде вершин двоичного дерева с корнем в соответствии с их порядком. При этом мы стремимся к тому, чтобы данные, стоящие в левом поддереве данной вершины  $v$  были бы меньше данных, соответствующих этой вершине, а данные, расположенные в правом ее поддереве — больше. Дерево данных, удовлетворявшее указанному условию, называют двоичным деревом поиска.

Например, в дереве двоичного поиска, приведенном на рисунке 1, слова фразы «У МОЕГО КОМПЬЮТЕРА ЕСТЬ ЧИП НА МАТЕРИНСКОЙ ПЛАТЕ» организованы именно таким образом. Заметим, что каждое слово в левом поддереве любой вершины предшествует (относительно алфавитного порядка) слову, стоящему в этой вершине, а каждое слово ее правого поддерева следует за словом в данной вершине.



Рисунок 1-Дерево двоичного поиска

Преимущество организации упорядоченных данных в виде двоичного дерева поиска заключается в возможности создания эффективного алгоритма поиска каких-то конкретных данных, включения новых данных в дерево и печати всей информации, содержащейся в дереве в виде упорядоченного списка.

Предположим, что в университете хранится список студентов (упорядоченный в алфавитном порядке), в котором кроме фамилий и имен имеются дополнительные важные сведения о студентах. Допустим также, что возникла необходимость найти какую-то информацию в списке или добавить новые записи к списку. Мы сейчас познакомимся с

алгоритмами, которые осуществляют поиск конкретной информации, добавляют новых студентов к списку и выводят на печать все записи в алфавитном порядке.

Записи о студентах организованы в двоичное дерево поиска (каждая запись соответствует одной вершине), и наши алгоритмы будут исследовать вершины этого дерева. Поскольку каждая вершина является также и корнем некоторого двоичного дерева поиска, алгоритмы будут последовательно проверять левые и правые поддеревья вершин. Чтобы это осуществить, необходимо приписать каждой вершине некоторый ключ для идентификации и ссылок на ее левое и правое поддеревья (в структурах данных для этих целей используются так называемые дважды связанные списки). Из всех ключей организуется линейно упорядоченное множество (в нашей ситуации оно упорядочено лексикографически). Алгоритм поиска определяет, является ли данная запись {ключ поиска} вершиной в двоичном дереве поиска, сравнивая ключ поиска с ключом корня дерева, и, при необходимости, осуществляет аналогичные сравнения в левом или правом поддеревьях.

```
Поиск(дерево)  
  begin  
    if дерево нулевое then  
      поиск := ложь;  
    else  
      if ключ поиска = ключ корня then  
        поиск := истина;  
      else  
        if ключ поиска < ключ корня then  
          поиск := поиск(левое поддерево);  
        else  
          поиск := поиск(правое поддерево);  
      end  
    end
```

Задача 1. Проследите за работой алгоритма над двоичным деревом поиска, изображенным на рисунке 2. Известно, что ключ поиска — буква R, а ключи вершин упорядочены лексикографически.

Решение

Поскольку  $R > K$ , то поиск продолжается в правом под дереве вершины K.

Так как  $R < T$  процесс поиска переключается на левое поддерево вершины T. Наконец, ввиду неравенства  $R \neq M$  и отсутствия поддеревьев у вершины M, алгоритм заканчивается и сообщает, что искомая вершина не была найдена

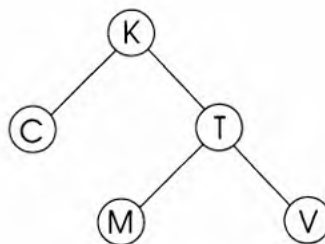


Рисунок 2

.Алгоритм вставки вставляет новые вершины {ключи вставок} в двоичное дерево поиска, создавая при этом новую вершину слева или справа от уже существующей. Это



делается таким образом, чтобы все ключи вершин в получившемся дереве подчинялись установившемуся порядку

```
Вставка(запись, дерево)  
  begin  
    if дерево нулевое then  
      добавить новую вершину;  
    else  
      if ключ вставки = ключ корня then  
        вывести на печать:  
        «запись содержится в дереве»;  
      else  
        if ключ вставки < ключ корня then  
          вставка := вставка(запись, левое поддерево);  
        else  
          вставка := вставка(запись, правое поддерево);  
      end  
    end
```

Задача 2.

Проследите за работой алгоритма вставки на примере вершин  $R$ ,  $A$  и  $L$  в дерево из задачи 1.

Поскольку  $R > K$  мы применяем алгоритм вставки к правому поддереву вершины  $K$ . Далее мы видим, что  $R < T$ . Значит, алгоритм вставки переключается на левое поддерево вершины  $T$ . Так как  $R > M$  и правое поддерево вершины  $M$  нулевое, то мы ставим вершину  $R$  справа от  $M$  и получаем дерево, изображенное ниже на рисунке

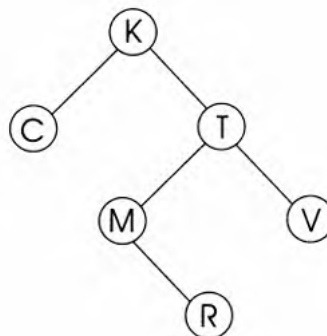


Рисунок 3

Теперь вставим  $A$  и  $L$ , построив дерево, показанное на рисунке 4.

Алгоритм вставки можно использовать для создания двоичного дерева поиска, начиная с нулевого дерева и последовательно добавляя новые данные в удобном для нас порядке. Например, двоичное дерево поиска на рисунке 1 является результатом применения алгоритма вставки к нулевому дереву в процессе добавления слов фразы «У МОЕГО КОМПЬЮТЕРА ЕСТЬ ЧИП НА МАТЕРИНСКОЙ ПЛАТЕ» в том порядке, в котором они в ней записаны.

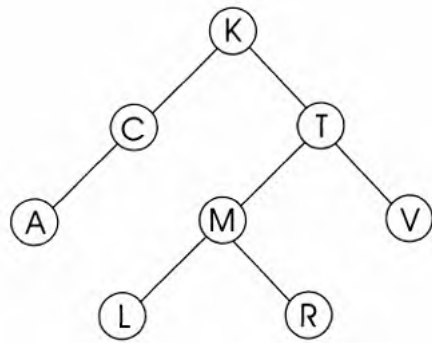


Рисунок 4

Алгоритм правильного обхода выводит на печать всю информацию, содержащуюся в двоичном дереве поиска, в надлежащем порядке. При этом все вершины дерева осматриваются в определенном порядке. Алгоритм работает следующим образом. Для каждой вершины, начиная с корня, печатается вся информация, содержащаяся в вершинах левого поддерева. Затем выводится информация, хранящаяся в этой вершине, и наконец, информация, соответствующая вершинам правого поддерева.

#### Правильный обход(дерево)

```

begin
  if дерево нулевое then
    ничего не делать;
  else
    begin
      правильный обход(левое поддерево);
      напечатать корневой ключ;
      правильный обход(правое поддерево);
    end
  end
end
  
```

Задача 3.

Примените алгоритм правильного обхода к дереву, полученному в задаче 2 после вставки *R*, *A* и *L*.

Решение

После работы алгоритма над указанным деревом получится список:

*A, C, K, L, M, R, T, V.*

Он соответствует обходу дерева против часовой стрелки (рисунок 5) и печати информации, содержащейся в вершинах, как только Вы прошли под вершиной.

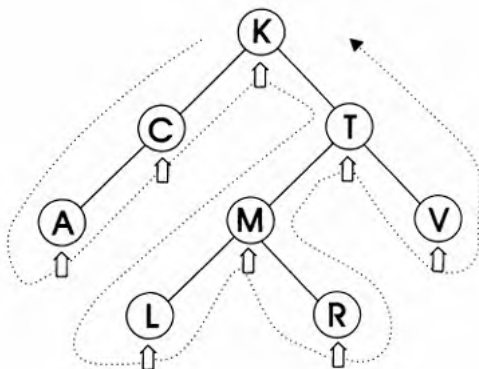


Рисунок 5

### *Задачи для самостоятельного решения*

1. Когда лучше использовать двоичные деревья?
2. Что такое двоичное дерево поиска?
3. Как организовано дерево на рисунке 1?
4. Как организован поиск конкретной информации в дереве поиска?
5. Опишите принцип работы алгоритм вставки?
6. Опишите принцип работы правильного обхода?

### **Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти не на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

## Практическая работа №14

### Решение комбинаторных задач

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

- 1 В корзине лежат 6 яблок и 12 груш. Сколько способов взять любой плод?
- 2 Сколькими способами можно выбрать две буквы: гласную и согласную из слова «камзол»?
- 3 Всего в группе 45 студентов. Из них в футбольной секции состоят 25 человек, в баскетбольной – 30, в шахматной – 28. 16 студентов участвуют в футбольной и баскетбольной секции, 18 – в футбольной и шахматной, и 17 – в баскетбольной и шахматной. Сколько студентов участвуют во всех трех секциях?
- 4 Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших друзей - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться - каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?
- 5 50 студентов второго курса изучают английский язык, 40 студентов – французский язык, 30 студентов – немецкий язык, 15 человек – английский и французский, 20 человек – английский и немецкий, 10 – французский и немецкий, 5 – все три языка. Определить число студентов, изучающих хотя бы один из этих языков.
- 6 Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего *нужно* выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
- 7 В корзине лежат 6 разных яблок и 12 груш. Сколько способов взять яблоко и грушу?
- 8 Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Сколько человек опросили?
- 9 Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для послылки письма?
11. В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать
12. человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?
13. В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?
14. Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской

энциклопедии?

15. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации?

16. Из 7 человек надо выбрать 5 человек и разместить их на пяти занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

17. Для участия в первенстве университета по легкой атлетике необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 7 бегунов?

18. В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

19. В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

20. Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

21. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации?

22. Из 7 человек надо выбрать 5 человек и разместить их на пяти занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

23. Для участия в первенстве университета по легкой атлетике необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 7 бегунов?

24. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

25. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»?

26. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

27. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

#### **Критерии оценивания практической работы:**

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти не на все

заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

## Контрольная работа №1

1. Изобразите следующие множества геометрически:

а)  $A \cup B$ , б)  $A \cap B$ , в)  $A \setminus B$ , г)  $B \setminus A$ , д)  $A \cup \overline{B}$ , е)  $A \cap \overline{B}$ , ж)  $\overline{A \cup B}$ , з)  $\overline{A \cap B}$ ,  
если  $A=[1;3]$ ,  $B=(-1;2]$ .

2. Проверьте равенства множеств, используя круги Эйлера:

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

3. Из 1000 студентов, занимающихся естественными науками, 630 посещают спецкурс по биологии, 390 – по химии и 720 – по математике. 440 посещают и математику, и биологию, 250 – и математику, и химию, и 200 – и биологию, и химию. 130 студентов посещают лекции по всем предметам. Сколько из 1000 студентов не посещают ни математики, ни биологии, ни химии?

4. Покажите, что бинарное отношение  $R$ , заданное на множестве  $A$ , является отношением эквивалентности. Найдите классы эквивалентности, порожденные элементами  $a$  и  $b$ .

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

$$a=4, b=1.$$

5. Соответствие «число  $x$  в три раза меньше числа  $y$ » рассматривается между множествами  $X$  и  $Y$ . Каким будет его график, если: а)  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \mathbb{N}$

б)  $X = [1; 3]$ ,  
 $Y = \mathbb{R}$  в)  $X = Y = \mathbb{R}$ .

Вариант 2

1. Изобразите следующие множества геометрически:

а)  $A \cup B$ , б)  $A \cap B$ , в)  $A \setminus B$ , г)  $B \setminus A$ , д)  $A \cup \overline{B}$ , е)  $A \cap \overline{B}$ , ж)  $\overline{A \cup B}$ , з)  $\overline{A \cap B}$ ,  
если  $A=(0;5)$ ,  $B=[-2;1]$ .

2. Проверьте равенства множеств, используя круги Эйлера:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

3. Из 170 спортсменов 70 занимаются футболом, 95 – хоккеем и 80 – теннисом. 30 занимаются и футболом, и хоккеем, 35 – и футболом, и теннисом, 15 – и хоккеем, и теннисом. 5 занимаются всеми 3 видами спорта. Сколько занимаются ровно 2 видами спорта?

4. Покажите, что бинарное отношение  $R$ , заданное на множестве  $A$ , является отношением эквивалентности. Найдите классы эквивалентности, порожденные элементами  $a$  и  $b$ .

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1)\}, a=3, b=2.$$

5. Даны множества:  $X = \{4, 10\}$ ,  $Y = \{6, 12\}$ . Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие: а)

«больше», б) «меньше», в) «меньше на 2», г) «меньше в 3 раза»?

**Критерии оценивания контрольной**

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.



## Контрольная работа №2

Исследовать на равносильность формулы  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ , заданные в дизъюнктивной нормальной форме, двумя способами:

1) путем их представления (на основе равносильных формул алгебры логики) в виде *совершенных конъюнктивных нормальных форм* с подтверждением правильности реструктуризации исходных формул построением их таблиц истинности;

2) путем представления заданных формул  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  в виде полиномов Жегалкина, формируемых двояко: а) на основе формулы Жегалкина; б) на основе метода неопределённых коэффициентов.

Таблица 1 – Варианты заданий к контрольной работе № 1

№ вар.	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	$\bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y} \vee \underline{y} z$	$x \bar{y} \vee x z$	$\bar{y} \vee z$
2	$\bar{y} \bar{z} \vee x z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}$	$\bar{y} \bar{x} \vee \underline{x} \bar{y} \vee \underline{y} z$	$\bar{z} \bar{x} \vee \bar{y} \vee x z$

### Критерии оценивания контрольной

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

### Контрольная работа №3

1. Нарисуйте граф  $G(V, E)$  с множеством вершин  $V = \{a, b, c, d, e\}$  и множеством ребер  $E = \{ab, ae, bc, bd, ce, de\}$ . Выпишите его матрицу смежности.

2. Найдите среди графов  $H$ ,  $K$  и  $L$ , изображенных на рис. 1 подграфы графа  $G$ .

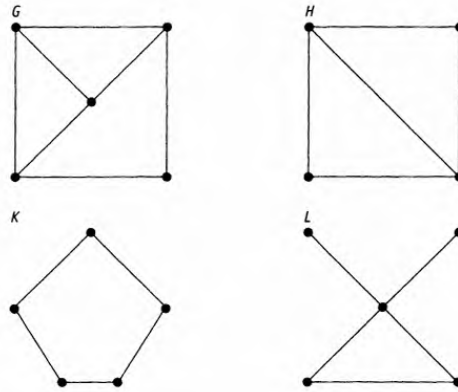


Рисунок 1

3. Найдите два разных остовных дерева в графе, изображенном на рис. 3

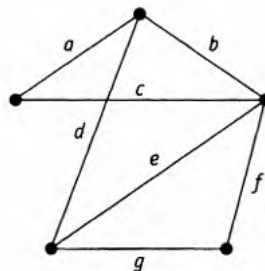


Рисунок 3

4. Покажите, что граф, изображенный на рис. 2, не является гамильтоновым.

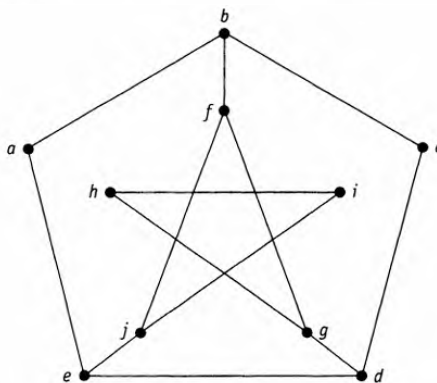


Рисунок 2

5. Определите

- (а) корень  $T$ ;
- (б) корень левого поддерева вершины  $B$ ;
- (в) листья  $T$ ;
- (г) сыновей вершины  $C$ .

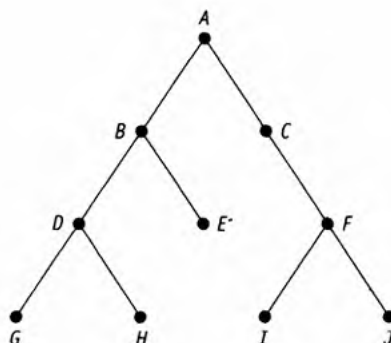


Рисунок 4

### Критерии оценивания контрольной

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Контрольная работа №4

### 1. Решить уравнение:

1 вариант

$$A_x^3 = 56x.$$

2 вариант

$$A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$$

### 2. Решить задачу

1 вариант

- А) Сколькими способами можно выбрать две буквы: гласную и согласную из слова «здание»?

- Б) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов?

2 вариант

Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «метаматематика»?

3.

1 вариант

- А) Разложить  $(x - 2)^7$   
Б) Найти восьмой член разложения  $(3a - 2)^{12}$

2 вариант

- А) Найти 15-й член разложения  $(x + y)^{17}$   
Б)  $(2 \cdot 2 + 6)6$ , вычислить

### Критерии оценивания контрольной

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

## Вопросы к экзамену

На экзамен студент выбирает один билет, в котором содержится два теоретических и одно практическое задание. На подготовку ответа дается 30-40 минут.

1. Общие понятия теории множеств. Способы задания.
2. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение.
3. Вычисление мощности множества. Построение диаграмм Венна для множества и подмножества.
4. Бинарные отношения и их свойства
5. Понятие высказывания. Основные логические операции.
6. Формулы логики.
7. Законы логики. Равносильные преобразования
8. Построение логических схем
9. Таблица истинности и методика её построения.
10. Понятие булевой функции. Способы задания булевой функции .
11. Методы минимизации нормальных форм булевых функций
12. Приведение формул логики к ДНФ и КНФ
13. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ).
14. Сумма по модулю два и ее свойства. Многочлен Жегалкина
15. Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Виды графов..
16. Матрицы смежности и инцидентий для графа
17. Гамильтоновы графы. Алгоритм ближайшего соседа.
18. Эйлеровы графы. Алгоритм связности.
19. Правило умножения. Правило сложения. Перестановки, сочетания, размещения.
20. Бином Ньютона.

### Критерии оценивания промежуточной аттестации:

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором студент свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если студент полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности, в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если студент имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания